

## **TERS SARKACIN NONLİNEER KONTROLÜ**

**Aydın Özbey<sup>1</sup>, Erol Uzal<sup>2</sup>**

- <sup>1</sup> İstanbul Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü-İSTANBUL  
E-Posta: ozbeya@istanbul.edu.tr
- <sup>2</sup> İstanbul Üniversitesi, Makina Mühendisliği i Bölümü-İSTANBUL  
euzal@istanbul.edu.tr

### **Özet**

Kontrol teorisinin klasik problemlerinden olan bir araba üzerindeki ters sarkacın üst noktada tutulması problemi göz önüne alınmıştır. Kontrol girişi olarak arabaya yatay yönde bir kuvvet uygulandığı düşünülmüştür. Sarkaç başlangıçta alt noktada bulunmaktadır. Kontrol sisteminin amacı sarkacı üst noktaya getirilirken arabayı da başlangıç noktasına getirmektir. Bu çalışmada geri besleme ile lineerleştirme yöntemi farklı bir tarzda kullanılarak problemin çözümüne çalışılmıştır. Sistemin çıkışı olarak sarkacın açısı ve arabanın konumunun pozitif tanımlı bir fonksiyonu alınmıştır. Bu sayede çıkış sıfırlandığında sarkacın ve arabanın konumları da sıfırlanacaktır.

*Anahtar Terimler: nonlinear kontrol, ters sarkaç, geri besleme ile lineerleştirme*

### **Abstract**

Stabilizing an inverted pendulum on a moving cart, one of the classical problems of control theory, is considered. Control input is a force applied to the cart in the lateral direction. The pendulum is at the lowest position initially. The aim of the control system is to bring the pendulum to the highest position and, at the same time, bring the cart to its initial position. The problem is attacked via a slightly modified form of feedback linearization. A positive definite function depending on the angle of the pendulum and the position of the cart is taken as the system output. Therefore, when the system output is brought to zero, the position of the pendulum and the cart will have been brought to zero.

*Key Words: nonlinear control, inverted pendulum, feedback linearization*

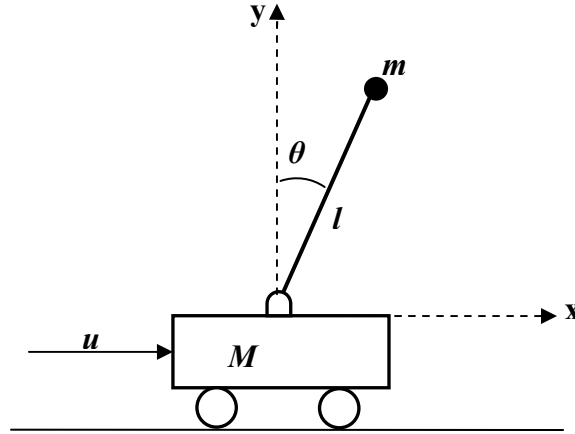
### **1. GİRİŞ**

Araba üzerindeki ters sarkaç problemleri kararsız oluşları ve doğrusal olmamaları sebebiyle kontrol yaklaşımlarının denenmesi için uygun problemlerdir. İncelenen araba üzerindeki ters sarkaç uygulaması, yatay yönde doğrusal hareket yapabilen bir araba üzerinde mesnetlenmiş bir çubuktan oluşmaktadır. Çubuğun kütlesi ihmal edilmiş olup ucunda noktasal bir m kütlesi vardır. Çubuğu, arabaya yatay doğrultuda bir kuvvet uygulayarak yatayla dik bir açıda tutmak amaçlanmaktadır. Çubuk geribesleme ile kısmi lineerleştirme (partial feedback linearization) yöntemi ile dikey konum civarına getirilmekte ve bu nokta civarındayken lineerleştirilmiş sistem için tasarlanmış tam durum geribeslemesi (full state feedback control) uygulanarak araba başlangıç konumuna geri getirilmektedir.

Ters sarkaç problemi üzerine yapılan çalışmalar, döner tabla [1,2] yada araba üzerindeki [3,4] veya teleskopik [5] ters sarkaç üzerine yapılan çalışmalar gibi uygulama yönünden çeşitlilik gösterirken; Sonlu elemanlar metodu [6], Lyapunov kararlılık yöntemi [7] yada Geri Besleme ile Kısmi Lineerleştirme [8] yöntemleri gibi çeşitli kontrol yöntemlerinin kullanılması bakımında da çeşitlilik göstermektedir.

## 2. MODELLEME

Araba üzerindeki ters sarkaç uygulaması şematik olarak Şekil 1 de görülmektedir. Burada  $m$  noktasal kütle, çubuk kütesiz ve  $M$  kütlesi öteleme hareketi yapmaktadır. Çalışma süresince:  $M=10$  kg,  $m=2$  kg,  $l=1$  m olarak kabul edilmiştir.



Şekil 1. Araba üzerindeki ters sarkaç

Newton Metodu kullanılarak her bir kütle için ayrı ayrı serbest cisim diyagramları oluşturularak sistemin matematiksel modeli çıkarıldığında;

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = u \quad (1)$$

$$\ddot{\theta}l + \ddot{x}\cos\theta - g\sin\theta = 0 \quad (2)$$

denklemleri elde edilir.

## 3. GERİBESLEME İLE KISMİ LİNEERLEŞTİRME

(1) ve (2) denklemleri düzenlendiğinde,

$$\ddot{\theta} = \frac{ml\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2 - (M + m)g\sin\theta}{ml\cos^2\theta - (M + m)l} + \frac{\cos\theta}{ml\cos^2\theta - (M + m)l}u \quad (3)$$

$$\ddot{x} = \frac{mg\sin\theta\cos\theta - ml\sin\theta\dot{\theta}^2}{m\cos^2\theta - (M + m)} - \frac{1}{m\cos^2\theta - (M + m)}u \quad (4)$$

halini alır. Burada,

$$x_1 = \theta \quad (5)$$

$$x_2 = \dot{\theta} \quad (6)$$

$$x_3 = x \quad (7)$$

$$x_4 = \dot{x} \quad (8)$$

tanımlarını yaparsak, durum uzayı gösterimi

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_1(x) + f_2(x)u \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= f_3(x) + f_4(x)u \end{aligned} \quad (10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$$f_1(x) = \frac{ml \sin x_1 \cos x_1 x_2^2 - (M + m)g \sin x_1}{ml \cos^2 x_1 - (M + m)l}$$

$$f_2(x) = \frac{\cos x_1}{ml \cos^2 x_1 - (M + m)l}$$

$$f_3(x) = \frac{mg \sin x_1 \cos x_1 - ml \sin x_1 x_2^2}{m \cos^2 x_1 - (M + m)}$$

$$f_4(x) = -\frac{1}{m \cos^2 x_1 - (M + m)}$$

olarak tanımlanmıştır.

Kontrol edilecek çıkış değeri

$$y = x_1 \quad (11)$$

olarak seçildiğinde,

$$\dot{y} = x_2 \quad (12)$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 \quad (13)$$

olur. (9) ve (13) ifadelerinden,

$$\ddot{y} = f_1(x) + f_2(x)u$$

elde edilir. Buradan kontrol kanununu,

$$u = \frac{1}{f_2(x)}(-k_1 y - k_2 \dot{y} - f_1(x)) \quad (14)$$

olarak alırsak.

$$\ddot{y} + k_2 \dot{y} + k_1 y = 0$$

elde edilir.  $k_1$  ve  $k_2$  sabitleri değiştirilerek  $y = x_1 = \theta'$ 'nin istenildiği kadar hızla sönümlenmesi mümkün olmaktadır. Bu durumda kontrol kanunu,

$$u = \frac{1}{f_2(x)}(-k_1 x_1 - k_2 x_2 - f_1(x)) \quad (15)$$

olur.

Görüldüğü gibi bu kontrol kanunu yalnızca (3) veya (9) durum denklemini lineerleştirebilmektedir, yani yapılan işlem kısmi bir lineerleştirmedir.  $\theta$  istenilen konuma getirilmekte, fakat  $x$  yer değiştirmesi denge konumuna gelmemektedir.

#### 4. TAM DURUM GERİ BESLEMESİ

(3) ve (4) denklemleri  $\theta=0$  civarında doğrusallaştırılarak düzenlendiğinde;

$$\ddot{\theta} = \frac{(M+m)g\theta}{Ml} - \frac{u}{Ml} \quad (16)$$

$$\ddot{x} = -\frac{mg\theta}{M} + \frac{u}{M} \quad (17)$$

olarak elde edilir. Burada durum uzayı gösterimi yapmak için (5), (6), (7) ve (8) değişiklikleri yapıldığında sistem,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (18)$$

şeklini alır. Burada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{Ml} & 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix}^T \quad (20)$$

dır.

Tam durum geri beslemesinde kontrol girişi bütün durum değişkenlerinin sağlanabilir olduğu farz edilerek,

$$u = K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 + K_4 x_4 = \mathbf{K}\mathbf{x} \quad (21)$$

şeklinde alınır. Bu durumda kapalı çevrim (kontrol kanunu uygulanmış) sistemin kökleri,

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK}) = 0 \quad (22)$$

eşitliğinden bulunur.

Lineerleştirilmiş sistem kontrol edilebilir olduğundan, sistemin kökleri  $-a$ ,  $-b$ ,  $-c$ ,  $-d$  olarak kabul edilirse;

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK}) = (s+a)(s+b)(s+c)(s+d) = 0$$

eşitliği elde edilir. Sol taraftaki determinant hesaplanıp sağ taraftaki çarpım sonucuna polinom eşitliğinden yararlanarak eşitlendiğinde dört bilinmeyen ve dört denklemden oluşan bir denklem sistemi elde ederiz. Dolayısı ile tam durum geri beslemesindeki katsayılarla sistemin kökleri arasında bir bağıntı oluşturulabilir. Bu şekilde sistemin kökleri tam durum geri beslemesi katsayılarını değiştirerek sistemin köklerine dolayısı ile kararlılığına etki edilebilmek mümkün olur.

## 5. GENEL GERİ BESLEME KANUNU VE SONUÇLAR

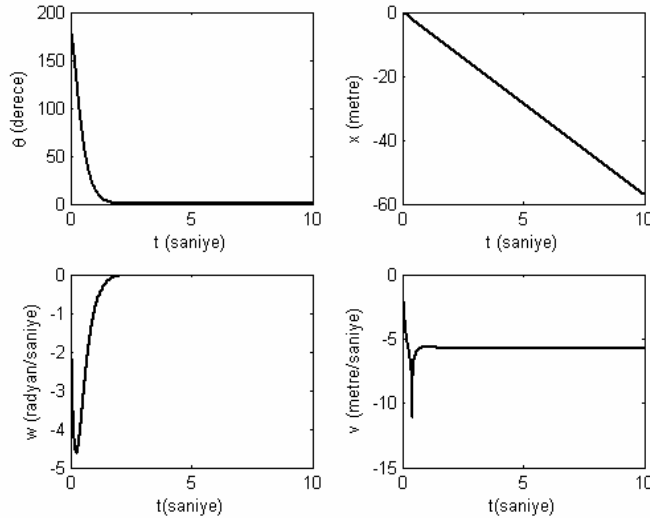
Kısmi lineerleştirme işlemi ile  $\theta$  ve  $\dot{\theta}$  ifadeleri kontrol edilebildiğinden bu yöntem ile çubuğu dik konuma getirmek ve bu konumda tutmak mümkündür. Lineerleştirilmiş sistem için tasarlanan kontrol kanununun  $|\theta| \leq \theta_0$  civarında lineer olmayan sistem içinde geçerli olduğu farz edilerek, çubuk  $|\theta| \leq \theta_0$  civarına gelene kadar sistemi geri besleme ile kısmi lineerleştirme ile kontrol etmek ve bu aralıkta lineerleştirilmiş sistem için tasarlanmış tam durum geri beslemesi uygulayarak arabayı başlangıç konumuna çekmek mümkün olur.

Bu durumda sisteme uygulanacak genel geri besleme kanunu,

$$u = \begin{cases} \frac{1}{f_2(x)} (-k_1 x_1 - k_2 x_2 - f_1(x)) & |\theta| > \theta_0 \\ K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3 x_3 + K_4 x_4 & |\theta| \leq \theta_0 \end{cases} \quad (23)$$

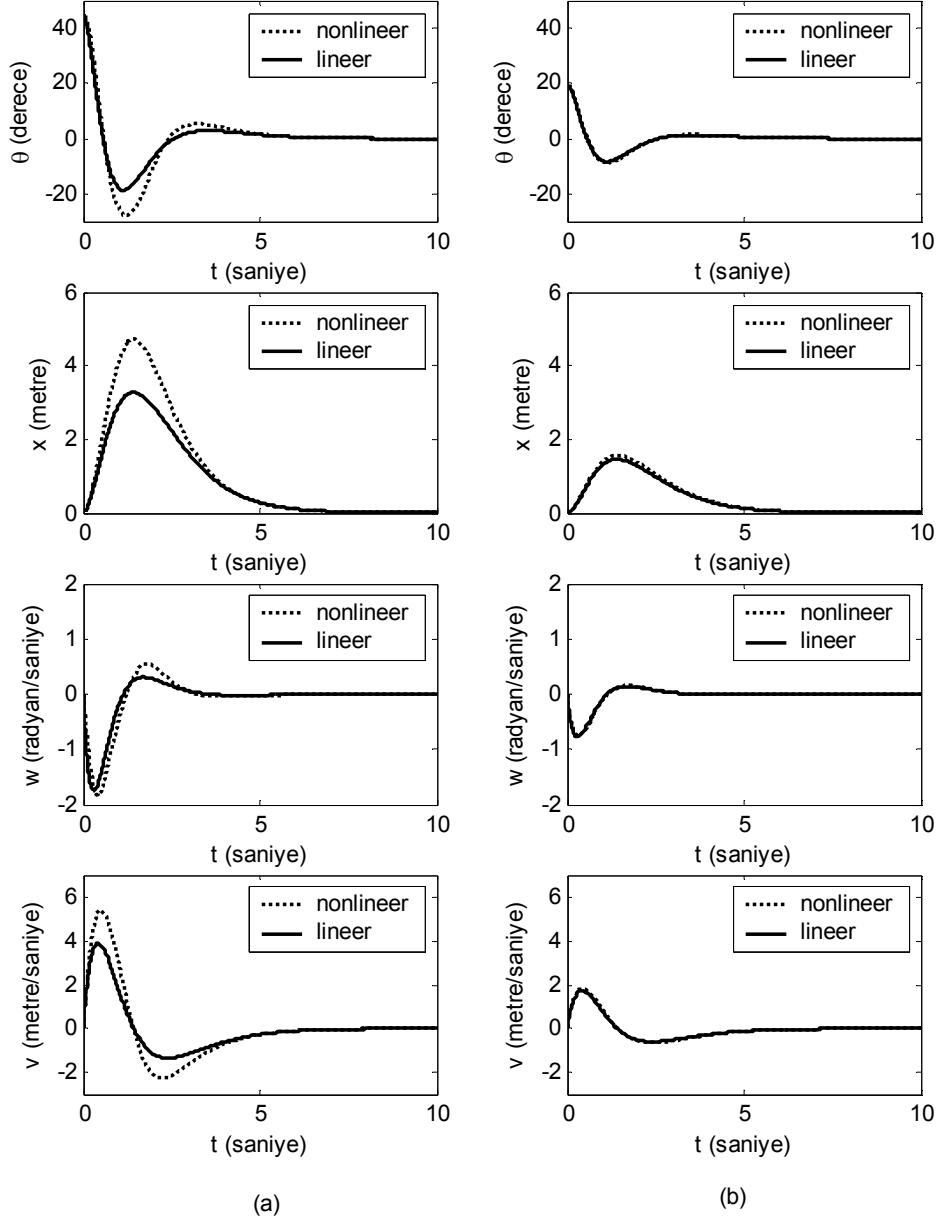
şeklinde ifade edilebilir.

Geri besleme ile kısmi lineerleştirme uygulanan sistemin davranışı Şekil 2 de görülmektedir. Grafikten de açıkça görüldüğü gibi sistemde sadece  $\theta$  ve  $\dot{\theta}$  ifadeleri kontrol edildiğinden çubuk dik konuma getirildikten sonra sisteme bir kuvvet girişi olmamakta ve sistem mevcut durumunu korumakta, bu durumda sabit hızla hareket edildiğinden  $x$  yer değiştirmesi sürekli olarak artmaktadır.



Şekil 2: Geri Besleme ile Lineerleştirme. ( $k_1=16$ ,  $k_2=4$  için)

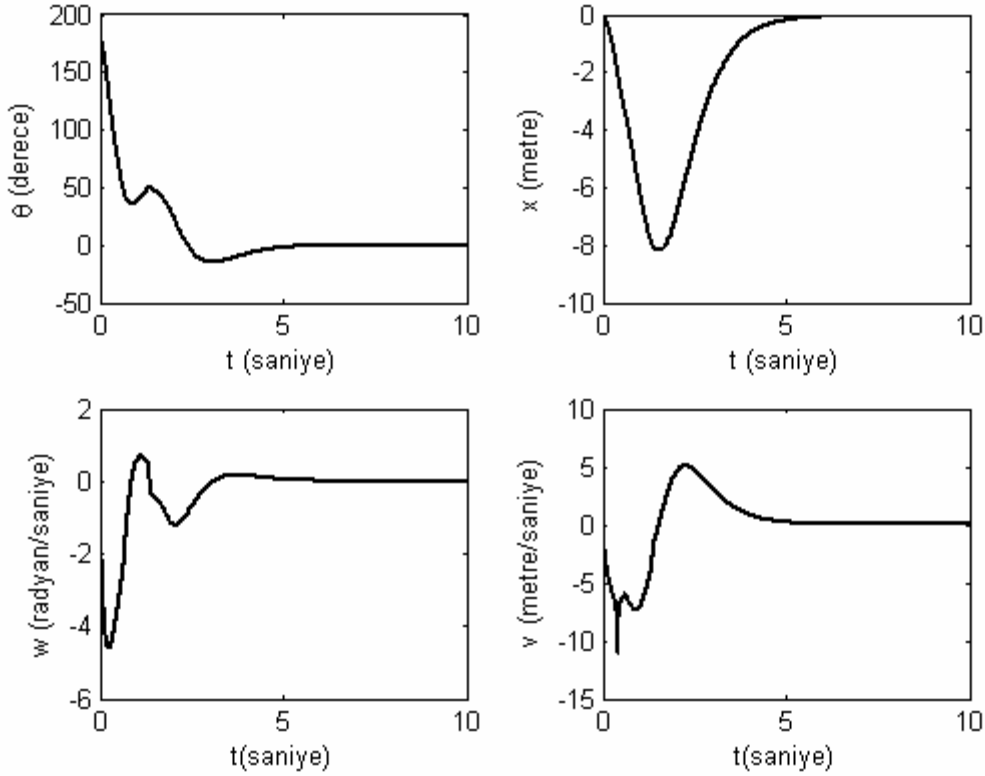
Lineerleştirilmiş sistem için tasarlanmış tam durum geri beslemesinin lineer olmayan sistemi küçük açılar için sağladığı Şekil 3 de karşılaştırmalı olarak görülmektedir. Görüldüğü gibi lineerleştirilmiş sistem için tasarlanmış tam durum geri beslemesinin lineer olmayan sistemin davranışını sergilemedeki başarısı açı değeri küçüldükçe artmaktadır.



Şekil 3: Tam Durum Geri Beslemesinin lineerleştirilmiş ve nonlinear sisteme  $\theta(0) = 45^\circ$  (a) ve  $\theta(0) = 20^\circ$  (b) uygulanması ( $s_1=-1$  ve  $s_2=s_3=s_4=-2$  için)

Geliştirilen genel kontrol kanununun sistemi kontrol etmedeki başarısı Şekil 4 de görülmektedir. Geri besleme ile kısmi lineerleştirme uygulanırken sistem  $|\theta| \leq 50^\circ$  'den sonra lineerize edilmiş sistem için tasarlanmış olan tam durum geri beslemesi tarafından kontrol edilebilecek bir konuma gelmektedir. Bu konuma geldikten hemen sonra kontrol kanunu bu yönde değiştirilmektedir. Bunun sebebi x değişkene olabildiğince erken müdahale edebilmektir. Aksi taktirde x değişkeni bir süre daha artmaya devam edeceğinden, bu değişkene bağlı kontrol

sabiti, kontrolcünün daha yüksek kuvvet değerleri üretmesine sebep olacak ve sistemin denge noktasına gelmesi gecikecektir.



Şekil 4: Geliştirilen genel kontrol kanununun sisteme uygulanması ( $\theta(0) = 180^\circ$  için)

## 6. KAYNAKÇA

- [1] K. J. LEE, J. H. HA, J. H. KONG, J. S. KIM, "Robust Control System Design For Rotational Inverted Pendulums Using Output Feedback Sliding Mode Controller and Disturbance Observer", *Proceedings of the 40th SICE Annual Conference*. International Session Papers-SICE 2001.
- [2] S. AWATAR, N. KING, T. ALLEN, I. BANG, M. HAGAN, D. SKIDMORE, K. CRAIG, "Inverted Pendulum Systems: Rotary and Arm-Driven – a Mechatronic System Design Case Study", *Mechatronics* 12 (2002) 357-370.
- [3] H. SU, C.A. WOODHAM, "On the Uncontrollable Damped Triple Inverted Pendulum", *Journal of Computational and Applied Mathematics* 151 (2003) 425-443.
- [4] T. HENMI, M. DENG, A. INOUE, N. UEKI, Y. HIRASHIMA, "Swing-Up Control of a Serial Double Inverted Pendulum", *Proceeding of the 2004 American Control Conference* Boston, Massachusetts June 30. July 2, 2004.
- [5] E. PAPA, A. CAPPOZZO, "A Telescopic Inverted-Pendulum Model of the Musculo-Skeletal System and Its Use for the Analysis of the Sit-To-Stand Motor Task", *Journal of Biomechanics* 32 (1999) 1205-1212.
- [6] N. DHANG, S. MAJUMDAR, "Optimal Control of Inverted Pendulums Using Finite Element Method", *Computer & Structures* Vol. 65. No. 6, pp. 937-947, 1997.
- [7] Q. WU, A. B. THORNTON-TRUMP, N. SEPEHRI, "Lyapunov Stability Control of Inverted Pendulums With General Base Point Motion", *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 33, No. 5, pp. 801-818, 1998.
- [8] K. PATHAK, J. FRANCH, S. K. AGRAWAL, "Velocity Control of a Wheeled Inverted Pendulum by Partial Feedback Linearization" *43<sup>rd</sup> IEEE Conference on Decision and Control*, December 14-17, 2004, Atlantis, Paradise Islands, Bahamas.