

DÖNEN EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN TİTREŞİM ÖZELLİKLERİNİN SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE BELİRLENMESİ

Bülent YARDIMOĞLU

bulentyardimoglu@iyte.edu.tr İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Makina Mühendisliği Bölümü,
35430-İzmir

ÖZET

Bu çalışmada, değişken kesitli ve değişken eğrilik yarıçaplı dönen eğri çubukların doğal frekansları ANSYS sonlu elemanlar ticari yazılımı ile araştırılmıştır. Eğri çubukların geometrisi ile ilgili olarak; enine kesit değişimi için farklı kesit değişim fonksiyonları ve eksen için de farklı eğrilik değişim fonksiyonları gözönüne alınarak, bu değişimlerin eğri çubuklarda titreşim özelliklerini nasıl etkiledikleri belirlenmiştir. Sonuçlar tablolarda ve şekillerde sunulmuştur.

Anahtar Sözcükler: Eğri eksenli çubuk, Değişken enine kesit, Değişken eğrilik yarıçapı.

ABSTRACT

In this study, the natural frequencies of rotating curved beams having variable cross-sections and variable radius of curvatures are investigated with ANSYS finite element commercial software. The effects of tapering functions and variable radius of curvature of curved beams on the natural frequencies are determined by considering the curved beams having different geometries. Results are presented in tables and figures.

Keywords: Curved beam, Variable cross-section, Variable radius of curvature.

1. GİRİŞ

Genel olarak, eksenleri eğrisel olan çubuklara eğri çubuklar adı verilir. Daha belirgin olarak bu çubuklar, eksen eğriliği düzlemde ise düzlemsel eğri çubuk, üç boyutlu uzayda ise uzaysal eğri çubuk olarak da isimlendirilirler. Düzlemsel eğri çubuklar düzlem içi ve düzlem dışı olmak üzere iki farklı tip harekete sahiptirler. Düzlem içi harekette, eğilme ve eksenel şekil değiştirmeler meydana gelir. Düzlem dışı harekette ise, buldukları düzleme dik yönde eğilme ve burulma şekil değişimleri oluşur. Düzlem içi ve düzlem dışı şekil değişimleri, çubuk kesitine bağlı olarak birbirleri ile bağlaşıklık yani ilişkili olabilirler. Kısacası, eğri çubukların titreşim hareketlerinde eğrilik eksen ve enine kesit geometrileri oldukça önemlidir.

Özel bir durum olan dairesel eksenli çubukların titreşim analizleri bir çok referansda bulunabilir. Ekseni dairesel olmayan eğri çubukların hareket denklemleri, değişken katsayılı diferansiyel denklemler ile ifade edildiğinden dolayı, yalnızca çok özel durumlarda tam çözüme sahiptir. Bu çubukların eksenlerin eğriliği tasarım gereksinimlerine bağlı olarak çeşitli formlarda olabilir. Dolayısıyla, genel formlardaki eksene sahip eğri çubukların titreşim analizlerinde sayısal yöntemler kullanılmaktadır. Uzaysal eğri çubukların eğrilikleri sabit olmayanların da hareket denklemleri için yukarıda ifade edilenler geçerlidir.

Eğri çubukların hareket denklemlerinin en genel hali Love [1] tarafından verilmiştir. Verilen bu denklemlerde uzaysal bir eğri çubuğun sahip olacağı iki düzlemdeki eğrilik yarıçapları ve eğrisel eksen etrafındaki burulma parametreleri de bulunmaktadır. Ekseni dairesel olan eğri çubukların hareket denklemleri karmaşık olmadığından, bir çok araştırmacı tarafından ele alınmıştır. Fakat, dönen dairesel eksenli eğri çubukların hareket denklemleri karmaşık olduğundan, yapılan çalışmalar azdır [2-4]. Değişken eğrilik yarıçaplı ve/veya enine kesit değişimli dönen eğri çubuklara bir örnek olarak Yardımoğlu ve Turgut [5], Şekil 1’de gösterilen katener (catenary) eğrisinin (zincir eğrisi olarak da anılır) y eksenine göre simetrisinin eklenmesiyle elde edilen eğriyi, süpürme ekseni olarak bir eğri çubuk oluşturup, bu eğri çubuğun her iki ucundan geçen eksen etrafındaki dönüşünün, doğal frekanslarına etkilerini sonlu elemanlar yöntemi ile araştırmışlardır.

Bu çalışmada; eğrilik ekseni katener şeklinde olan, enine kesit değişimleri eğri çubuk boyunca doğrusal olarak değişen ve sabit açısal hız ile dönen eğri çubukların doğal frekanslarının, eğri çubuk geometrisi ile ilgili parametrelerden nasıl etkilendiği sonlu elemanlar yönteminin kullanıldığı ANSYS ticari yazılımı ile araştırılmıştır. Sonuçlar tablolarda ve şekillerde verilmiştir.

2. SEÇİLEN EĞRİ ÇUBUK GEOMETRİSİ

2.1 Giriş

Bu çalışmada değişken eğrilik yarıçaplı eğri çubuk ekseni olarak katener formu seçilmiştir. Çubukların enine kesit değişimleri de eğrisel çubuğun ekseni boyunca doğrusal olarak değişecek şekilde alınmıştır. Seçilen çubuk geometrilerinin matematiksel ifadeleri aşağıdaki alt bölümlerde detaylandırılmıştır.

2.2 Katener eksenli eğri çubuk

Katener eksenli eğri bir çubuğun ekseni Şekil 1’de gösterilmiş olup, bu eksenin fonksiyonu ve çeşitli parametreleri aşağıda ifade edilmiştir:

$$y(x) = R_0 [\cosh(x/R_0) - 1] \quad (1)$$

$$\tan \alpha = dy(x)/dx = \sinh(x/R_0) \quad (2)$$

$$x_r = R_0 \operatorname{arc} \sinh(\tan \alpha_r) \quad (3)$$

$$y_r = R_0 (1/\cos \alpha_r - 1) \quad (4)$$

Eğri üzerindeki bir noktanın, orijinden itibaren ölçülen eğrisel s uzaklığı [6]

$$s = \int_0^s \sqrt{1 + (dy(x)/dx)^2} dx \quad (5)$$

ifadesi ile belirleneceğinden, (x_r, y_r) noktasına kadar olan eğrisel uzunluk s_L

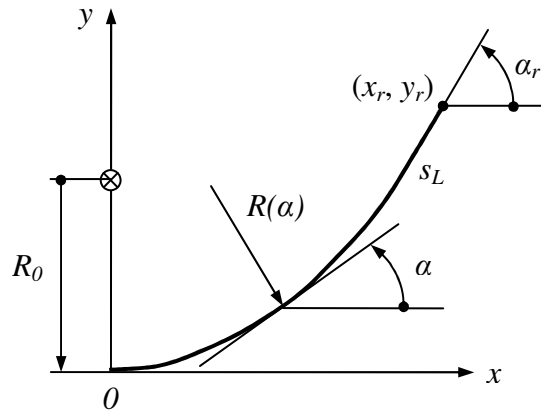
$$s_L = R_0 \tan \alpha_r \quad (6)$$

olarak bulunur. Eğrinin herhangi bir x koordinatındaki eğrilik yarıçapı ise [6]

$$R(x) = \frac{[1 + (dy(x)/dx)^2]^{3/2}}{d^2 y(x)/dx^2} = R_0 \cosh^2(x/R_0) \quad (7)$$

ifadesi ile belirlenir. Denklem (2)'deki x , α cinsinden yazılıp, Denklem (7)'de konular ve düzenlenirse, eğrilik yarıçapı ifadesi α cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$R(\alpha) = R_0 \sec^2 \alpha \quad (8)$$



Şekil 1. Katener eksenli eğri çubuk parametreleri

2.3 Doğrusal değişimli enine kesit fonksiyonu

Eğri çubuğun enine kesitinin genişlik ve yükseklikleri aşağıdaki fonksiyonlar ile ifade edilmiştir:

$$b(s) = b_0 - b_1 s \quad (9)$$

Burada;

- $b(s)$: Enine kesit genişliği (mm)
- b_0 : $s=0$ daki enine kesit genişliği (mm)
- b_1 : Genişlik değişim parametresi (-)

ve

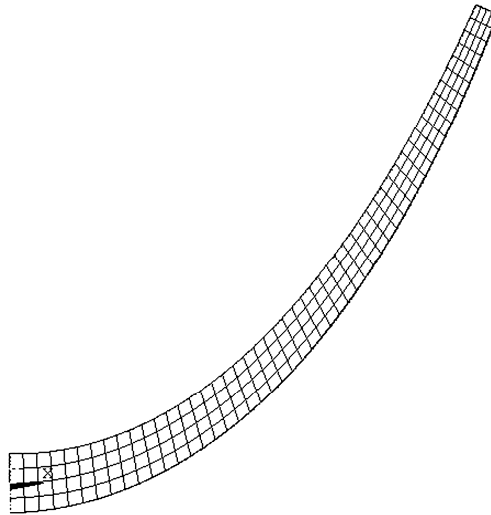
$$h(s) = h_0 - h_1 s \quad (10)$$

Burada;

- $h(s)$: Enine kesitin yüksekliği (mm)
 h_0 : $s=0$ daki enine kesitin yüksekliği (mm)
 h_1 : Yükseklik değişim parametresi (-)

3. SONLU ELEMANLAR MODELİ

Bölüm 2 de geometrik modelleme için verilen denklemler kullanılarak, eğrilik yarıçapları ve kesit alanları çubuk eksenini boyunca değişken olan bir grup eğri çubukların katı modelleri oluşturulmuştur. Şekil 1’de gösterilen eksen takımına göre, eğri çubuğun 0 noktasından geçen z eksenini etrafında Ω sabit açısal hızı ile döndüğü durum gözönüne alınmıştır. Sabit veya değişken kesitli ve katener eksenli eğri çubukların ANSYS’de sonlu elemanlar ile modellenmesinde: “Brick 8node 45” olarak isimlendirilen 8-düğüm noktalı, her düğüm noktasında 3 adet doğrusal yerdeğiştirme serbestliği olan elemanlar kullanılmıştır. Oluşturulan katı modelin eleman ağlarına bölünmesinde daha önceki benzer çalışmalardan elde edilen tecrübeler kullanılmıştır. Eğri çubuğun enine kesit kenarları 4, boylamasına kenarlar da 50 eşit parçaya bölünmüş, böylece $4 \times 4 \times 50 = 800$ adet sonlu elemanlar kullanılmıştır. Sonlu elemanlar modelindeki toplam düğüm sayısı 1275’dir. Her düğüm 3 serbestlikli olduğundan, sınır koşullarının uygulanmadığı model için serbestlik derecesi de $3 \times 1275 = 3825$ ’dir. 0 noktası etrafında dönen eğri çubuğun 0 daki kökü ankastre, uç kısmı da serbestdir. Bu sınır koşullarının modele uygulanması ile $5 \times 5 \times 3 = 75$ serbestlik kısıtlandığından dolayı, çözüme esas sistemin toplam serbestliği de $3825 - 75 = 3750$ ’dir. Şekil 2’de sonlu elemanlara bölünmüş olan değişken kesitli eğri bir çubuk gösterilmiştir.



Şekil 2. Eğri çubuğun sonlu elemanlar modeli: x-y düzleminde

4. HAKAKET DENKLEMİ VE DOĞAL FREKANSLARIN BULUNMASI

Gerçekte sürekli bir ortam olan eğri çubuk, sonlu elemanlar yöntemi ile ayırık sistem haline geldiğinden, onun kütle ve dirençlilik özellikleri de sırasıyla $[M]$ ve $[K]$ matrisleri ile temsil edilirler. Çok serbestlik dereceli olan bu sistemin doğal titreşim karakteristikleri

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (11)$$

Burada;

$\{u\}$: sonlu elemanlar modelinin düğüm noktaları için yerdeğiştirme vektörü (m)

$\{\ddot{u}\}$: $\{u\}$ 'nun zamana göre ikinci türevi (m/s^2)

hareket denkleminin çözümü ile belirlenir. Denklem (11) deki $[K]$ matrisi, sistemin merkezkaç kuvveti nedeniyle sahip olduğu gerilme etkisini de içermektedir. Zamana göre harmonik olarak değişen serbest titreşimler için yerdeğiştirme vektörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\{u\} = \{\phi\}_i \cos(\omega_i t) \quad (12)$$

Burada;

ω_i : i . doğal frekans (rad/s)

$\{\phi\}_i$: i . doğal frekans için titreşim biçimi vektörü (m)

Denklem (12)'nin Denklem (11) de konulması ile

$$(-\omega_i^2[M] + [K])\{\phi\}_i = \{0\} \quad (13)$$

elde edilir. Genelleştirilmiş özdeğer problemi olan Denklem (13)'ün çözümü ile titreşim karakteristikleri elde edilir.

5. DOĞAL FREKANSLAR VE DEĞERLENDİRMELER

Bildiri başlığında ifade edilen konunun sayısal çalışması için; aynı uzunlukta fakat dört farklı R_0 parametresi için sabit kesitli katı model oluşturulmuştur. Oluşturulan bu temel katı modellerden sonra, her bir temel katı model için de enine kesitleri eğri çubuk eksenine boyunca değişen üç farklı katı model daha yapılmıştır. Böylece oluşturulan toplam onaltı katı modelin doğal frekanslarının belirlenmesi ile titreşim özelliklerinin değişimleri incelenmiştir. Katı modellerin tamamında elastisite modülü $E=200000$ MPa ve yoğunluk $\rho=7.85 \times 10^{-9}$ ton/mm³ olarak alınmıştır. Dönme hızı $\Omega=1500$ dev/dak sabit olarak seçilmiştir. Oluşturulan katı modellerin modele bağlı geometrik özellikleri sunulan tablolarda verilmiş olup, tamamı için uzunluk $s_L=120$ mm, kökteki enine kesit genişliği $b_0=10$ mm ve kesit yüksekliği $h_0=10$ mm'dir.

Farklı R_0 parametrelerinin doğal frekanslara etkileri Tablolar 1-4'de verilmiştir. Verilen bu tabloların her biri farklı enine kesit değişimlerini içermektedirler.

Tablo 1. $b_1=h_1=0$ için R_0 parametresinin doğal frekanslara etkileri

R_0 (mm)	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)	f_4 (Hz)	f_5 (Hz)	f_6 (Hz)
50	572.71	578.95	3028.7	3050.3	7887.9	7966.6
100	569.95	573.04	3131.1	3155.7	7637.0	8532.8
150	567.56	569.22	3235.4	3264.2	7397.5	8834.2
200	566.22	567.23	3303.5	3327.4	7264.4	8991.8

Tablo 2. $b_1=h_1=2/120$ için R_0 parametresinin doğal frekanslara etkileri

R_0 (mm)	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)	f_4 (Hz)	f_5 (Hz)	f_6 (Hz)
50	627.48	634.05	2982.2	3026.9	7597.3	8365.4
100	624.74	628.05	3078.5	3084.7	8121.7	8309.4
150	622.29	624.08	3162.0	3165.5	8268.4	8353.6
200	620.90	621.99	3211.6	3216.4	8261.5	8465.3

Tablo 3. $b_1=h_1=4/120$ için R_0 parametresinin doğal frekanslara etkileri

R_0 (mm)	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)	f_4 (Hz)	f_5 (Hz)	f_6 (Hz)
50	702.27	709.20	2926.2	2976.8	7189.8	7686.9
100	699.52	703.10	2992.7	3013.7	7571.3	7767.1
150	696.98	698.94	3058.2	3067.4	7734.2	7814.4
200	695.53	696.73	3096.7	3101.4	7809.6	7846.9

Tablo 4. $b_1=h_1=6/120$ için R_0 parametresinin doğal frekanslara etkileri

R_0 (mm)	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)	f_4 (Hz)	f_5 (Hz)	f_6 (Hz)
50	813.53	820.90	2866.1	2909.2	6655.8	6944.0
100	810.67	814.57	2905.3	2929.0	6902.0	7020.6
150	808.00	810.15	2949.9	2962.9	7010.4	7064.9
200	806.47	807.79	2976.3	2984.2	7059.6	7089.0

Kesit değişim parametrelerinin doğal frekanslara etkileri de Tablolar 5-8'de verilmiştir. Esasen, Tablolar 5-8, bir önceki tablo grubunun farklı düzenlemesinden başka bir şey değildir.

Tablo 5. $R_0=50$ mm için $b_1=h_1$ parametrelerinin doğal frekanslara etkileri

$b_1=h_1$ (-)	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)	f_4 (Hz)	f_5 (Hz)	f_6 (Hz)
0	572.71	578.95	3028.7	3050.3	7887.9	7966.6
2/120	627.48	634.05	2982.2	3026.9	7597.3	8365.4
4/120	702.27	709.20	2926.2	2976.8	7189.8	7686.9
6/120	813.53	820.90	2866.1	2909.2	6655.8	6944.0

Tablo 6. $R_0=100$ mm için $b_1=h_1$ parametrelerinin doğal frekanslara etkileri

$b_1=h_1$ (-)	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)	f_4 (Hz)	f_5 (Hz)	f_6 (Hz)
0	569.95	573.04	3131.1	3155.7	7637.0	8532.8
2/120	624.74	628.05	3078.5	3084.7	8121.7	8309.4
4/120	699.52	703.10	2992.7	3013.7	7571.3	7767.1
6/120	810.67	814.57	2905.3	2929.0	6902.0	7020.6

Tablo 7. $R_0=150$ mm için $b_1=h_1$ parametrelerinin doğal frekanslara etkileri

$b_1=h_1$ (-)	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)	f_4 (Hz)	f_5 (Hz)	f_6 (Hz)
0	567.56	569.22	3235.4	3264.2	7397.5	8834.2
2/120	622.29	624.08	3162.0	3165.5	8268.4	8353.6
4/120	696.98	698.94	3058.2	3067.4	7734.2	7814.4
6/120	808.00	810.15	2949.9	2962.9	7010.4	7064.9

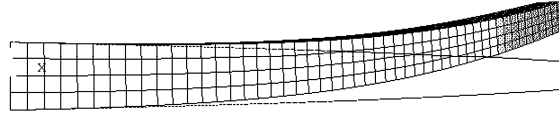
Tablo 8. $R_0=200$ mm için $b_1=h_1$ parametrelerinin doğal frekanslara etkileri

$b_1=h_1$ (-)	f_1 (Hz)	f_2 (Hz)	f_3 (Hz)	f_4 (Hz)	f_5 (Hz)	f_6 (Hz)
0	566.22	567.23	3303.5	3327.4	7264.4	8991.8
2/120	620.90	621.99	3211.6	3216.4	8261.5	8465.3
4/120	695.53	696.73	3096.7	3101.4	7809.6	7846.9
6/120	806.47	807.79	2976.3	2984.2	7059.6	7089.0

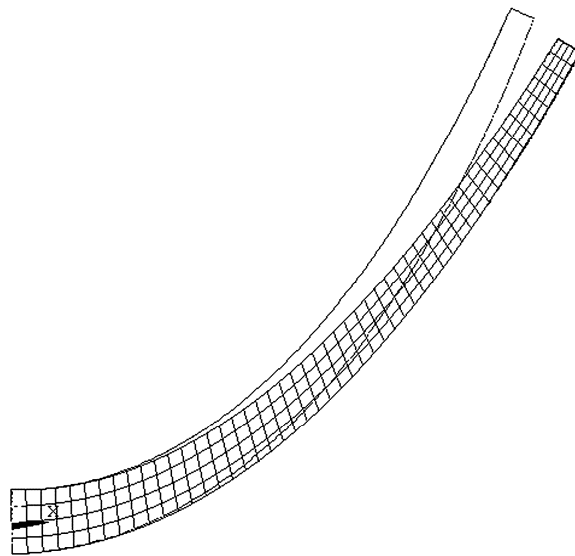
Tablo 1-4'den görülmektedir ki: verilen $b_1=h_1$ aralığında R_0 değeri arttıkça, birinci ve ikinci doğal frekanslar azalmakta, fakat üçüncü-altıncı doğal frekanslar bir istisna dışında artmaktadır. Bu istisna $b_1=h_1=0$ durumunda beşinci doğal frekansıdır.

Tablo 5-8'den görülenler ise: verilen R_0 aralığında $b_1=h_1$ değeri arttıkça, birinci ve ikinci doğal frekansların azaldığı, fakat üçüncü-altıncı doğal frekansların arttığıdır.

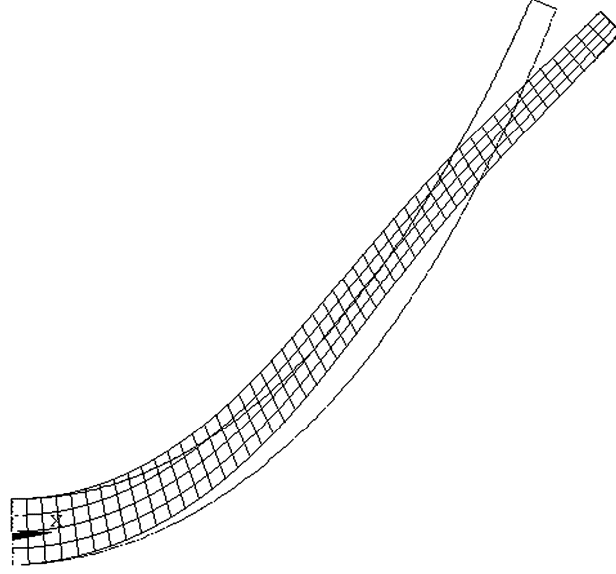
Boyutsal parametreleri $R_0=50$ mm, $b_1=h_1=6/120$ olan ve doğal frekansları Tablo 4 ve 5'de verilen eğri çubuğun titreşim biçimleri, Şekil 3-8'de hareketlerinin anlaşılmasına uygun olarak seçilen x-y düzlemine dik veya x-y düzleminde verilmişlerdir.



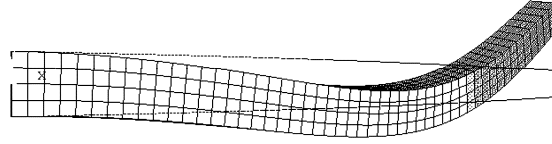
Şekil 3. Eğri çubuğun birinci titreşim biçimi: x-y düzlemine dik



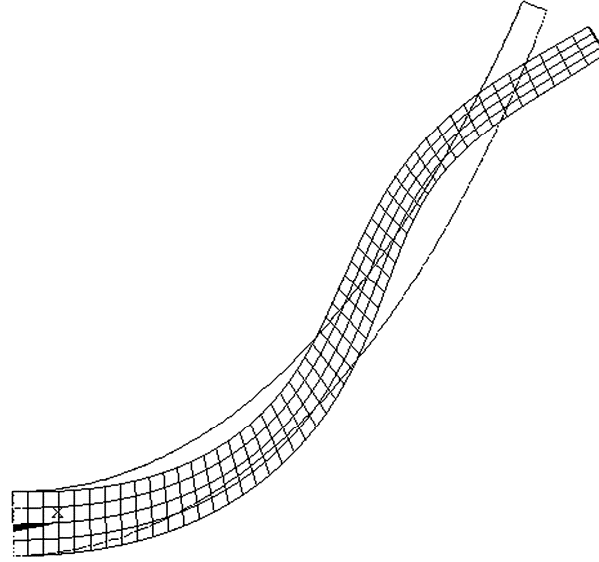
Şekil 4. Eğri çubuğun ikinci titreşim biçimi: x-y düzleminde



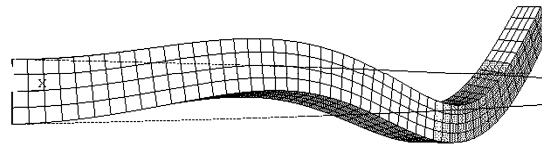
Şekil 5. Eğri çubuğun üçüncü titreşim biçimi: x-y düzleminde



Şekil 6. Eğri çubuğun dördüncü titreşim biçimi: x-y düzlemine dik



Şekil 7. Eğri çubuğun beşinci titreşim biçimi: x-y düzleminde



Şekil 8. Eğri çubuğun altıncı titreşim biçimi: x-y düzlemine dik

6. SONUÇ

Değişken eğrilik yarıçaplı ve değişken enine kesitli dönen eğri çubukların titreşim karakteristiklerinin belirlenmesine örnek olarak: eksenli katener formunda olan ve enine kesit değişimi eğri çubuk eksenli boyunca doğrusal olarak değişen geometrideki bir grup eğri çubuğun analizleri sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS yazılımı ile araştırılmıştır. Doğal frekansların geometrik parametrelerden etkileşimi bulunmuştur. Seçilen bir örnek için düzlem içi ve düzlem dışı titreşim biçimleri şekiller ile verilmiştir.

7. KAYNAKÇA

[1] LOVE, A. E. H., **Treatise on Mathematical Theory of Elasticity**, Dover Publications, New York, (1944).

[2] WANG, J. T. S. ve MAHRENHOLTZ, O., Bending frequencies of a rotating curved beam, *Archive of Applied Mechanics*, 44, 399–407, (1975).

[3] PARK, J. H. ve KIM, J. H., Dynamic analysis of rotating curved beam with a tip mass, *Journal of Sound and Vibration*, 228, 1017–1034. (1999).

[4] LEE, S. Y., SHEU, J. J. ve LIN, M. L., In-plane vibrational analysis of rotating curved beam with elastically restrained root, *Journal of Sound and Vibration*, 315, 1086–1102, (2008).

[5] YARDIMOĞLU, B. ve TURGUT, S., Değişken Kesitli ve Catenary Formunda Eksenli Dönen Eğri Çubuğun Titreşim Analizi, **TÜRKİYE Abaqus Kullanıcılar Toplantısı Sunum Kitabı**, 87-90, İstanbul, (2009).

[6] RILEY, K. F., HOBSON, M.P. ve BENCE, S. J., **Mathematical Methods for Physics and Engineering**, Cambridge University Press, New York, (2006).